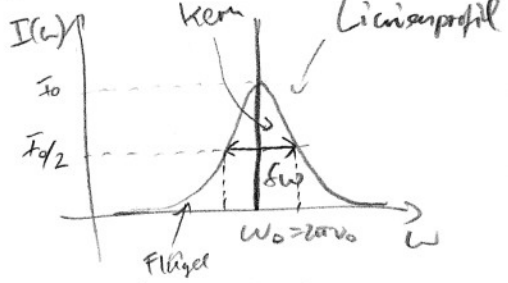
7.3. Lebensdauer angeregter Zustände

Angeregter Zustand $\rightarrow$ Spontane Emission, endliche Lebensdauer

((qm: angeregte Zustände: Eigenzustand, leben ohne Störung so lange
QED: Vakuumfluktuationen $\rightarrow$ spontane Emission, „stimuliert" durch Fluktuation
$\rightarrow$ endliche Lebenszeit))



$\rightarrow$ natürliche Linienbreite

Aus Heisenberg Unschärferelation $\quad \Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$
$$\Delta E = h \Delta\nu \quad \Delta t \sim \frac{h}{2\pi}$$

$h\nu_0 = E_i - E_k$

$$\boxed{\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\Delta t}}$$

endliche Lebenszeit
$\rightarrow$ endliche Linienbreite

$\delta\omega$: Halbwertsbreite (FWHM)

$$\delta\lambda = (\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{c}{\nu_1} - \frac{c}{\nu_2} \qquad \nu \cdot \lambda = c$$

$$\delta\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu = -\frac{\lambda}{\nu} d\nu \qquad (51)$$

$$\left|\frac{d\lambda}{\lambda}\right| = \left|\frac{d\nu}{\nu}\right| = \left|\frac{d\omega}{\omega}\right| \qquad (52)$$

N_i Atome angeregter Zustand; A spontane Emissions Rate

$$\dot{N}_i = -A N_i$$

A kann auch mehrere Übergänge sein
$A = \sum_j A_{ij} \qquad A_{ij} \quad i \rightarrow j$ Übergang

$$(41) \qquad \boxed{N_i(t) = N_0 e^{-At}}$$

N_i nimmt exponentiell ab

mittlere Lebensdauer $\bar{t} = \frac{1}{N_0} \int_{N_0}^{0} t \, dN_i(t) = -\int_0^\infty t A e^{-At} dt = \boxed{\frac{1}{A} := \tau} \qquad (42)$

Lebensdauer $\tau = \tau_{spont}$

Falls es noch andere Relaxations-Prozesse gibt:

$$\dot{N}_i = -(A+R) N_i \quad \rightarrow \quad \tau_{eff} = \frac{1}{A_i + R} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\tau_{eff}} = A + R$$

$$\frac{1}{\tau_{eff}} = \frac{1}{\tau_{spont}} + \frac{1}{\tau_{other}}$$

Raten addieren sich.

7.4.1. Natürliche Linienbreiten

Abstrahlung / spontane Emission Photon eines angeregten Atoms;
Modell: klassischer, gedämpfter harmonischer Oszillator

m Masse

D Rückstellkonst.

ω_0 Eigenfreq. $= \sqrt{\frac{D}{m}}$

γ Dämpfungskonst. $= 1/\tau$

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (53)$$

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma/2\, t} \left\{ \cos(\omega t) + \frac{\gamma}{2\omega} \sin(\omega t) \right\} \qquad (54)$$

RB: $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$

mit Dämpfungs-verschobener Freq. $\omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2$ (oft $\gamma \ll \omega_0$, d.h. $\omega \sim \omega_0$)

$$x(t) \cong x_0 e^{-\gamma/2\, t} \cos(\omega_0 t) \qquad (55)$$

Dämpfung → nicht mehr monochrom

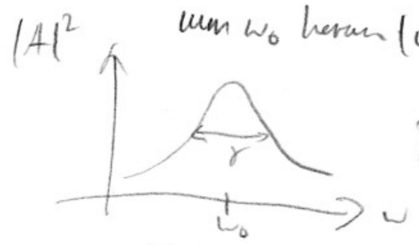
Amplitude abgestrahlter Strahlung $A(\omega) = \hat{x}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x_0 e^{-\gamma/2\, t} \cos(\omega_0 t)\, e^{-i\omega t}\, dt$ (56)

↳ Ann. $x(t) = 0$ $t < 0$

$$A(\omega) = \frac{x_0}{\sqrt{8\pi}} \left\{ \frac{1}{i(\omega_0 - \omega) + \gamma/2} + \underbrace{\frac{1}{i(\omega_0 + \omega) + \gamma/2}}_{\text{klein term}} \right\} \qquad (57)$$

$A(\omega) \propto E(\omega)$, P = spektrale Leistung $\propto A^* A$,

um ω_0 herum ($\omega \sim \omega_0$) → $\omega_0 - \omega \ll \omega_0 + \omega$ ⇒



$$P(\omega) = \frac{C}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2} \qquad (58)$$

Normierung: $\int_0^\infty P(\omega)\, d\omega = P_0 \sim \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega)\, d\omega \Rightarrow C = P_0 \frac{\gamma}{2\pi}$ (59)

$$P(\omega) = \frac{P_0\, \gamma/2\pi}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2} \qquad (60)$$

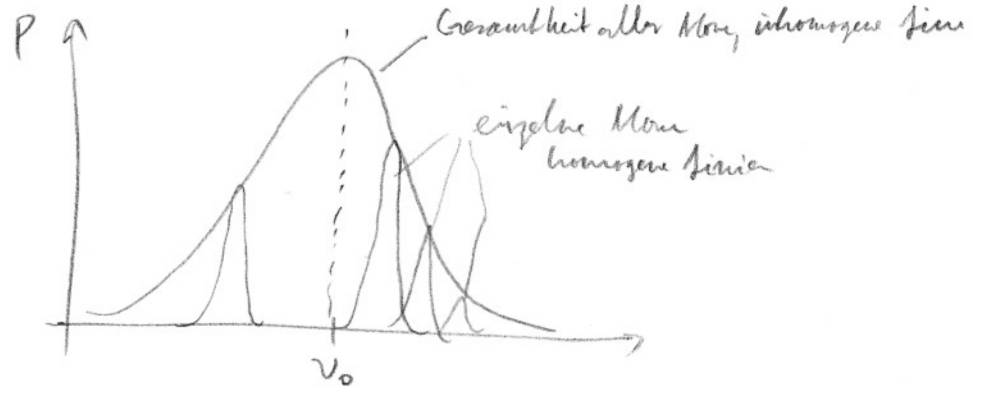
$\delta\omega$ = FWHM = γ = natürliche Linienbreite $= \frac{1}{\tau} = A$ (61)

Linienverbreiterung:

nehme Ensemble von Atomen.

homogene Linienverbreiterung: gleich für alle Atome, bei derselben Freq.

inhomogene Verbreiterung: nicht gleich für alle Atome, inkl. ν

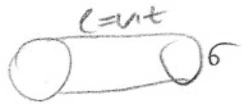


Arten von Linienverbreiterung

- natürlich (homogen)
- Druckverbreiterung: Stösse mit anderen Atomen / Wechselwirkung
  (homogen)
  ↳ alle Atome selben Druck
  Verschiebung der Emissionsfreq., statistische Verteilung ν
  → Linienverbreiterung

Stossrate $R = n \overset{\text{Fläche}}{\overset{\downarrow}{\sigma}} vt/t = n\sigma v$

dichte $\frac{\#\text{Atome}}{V}$



Ideales Gas: $pV = NkT \rightarrow p = nkT$

kinetische Gas Theorie / Äquipartition: $\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT$

$$\rightarrow v = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad \left(\text{oder } \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \right)$$

$$R = \frac{p}{kT} \sigma \sqrt{\frac{3kT}{m}} = p\sigma \sqrt{\frac{3}{mkT}}$$

$$\boxed{\delta\omega = R = p\pi d^2 \sqrt{\frac{3}{mkT}}}$$

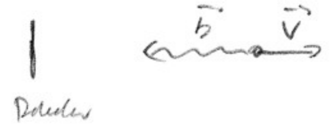
d: grösse Atom
harte
$\sigma = \pi d^2$

Dopplerverbreiterung

angeregtes Atom bewegt sich $\vec{v}$

Emissions/Absorptions Frequenzen verschieben sich: $\omega_e = \omega_0 + \vec{k}\vec{v}$

z.B.



$$\vec{k}\cdot\vec{v} = -\frac{2\pi}{\lambda} v \underset{\nu\lambda = c}{=} -\frac{2\pi\nu}{c} v = -\omega \frac{v}{c}$$

hängt von $\underset{\text{Verteilung}}{v}$ / Atom ab → inhomogen, Man kann zeigen (Gas im TDG, Maxwell Vert.)

$$\delta\omega_0 = \frac{\omega_0}{c}\sqrt{\frac{8kT\ln 2}{m}}$$