

**1. Vergleich der spontanen und stimulierten Emission (freiwillige Korrektur)**

- (a) Bei welcher Temperatur ist die Wahrscheinlichkeit für stimulierte Emission gleich derjenigen für spontane Emission? Betrachte dazu eine elektromagnetische Welle im thermischen Gleichgewicht mit dem thermischen Strahlungsfeld, d.h. die spektrale Energiedichte  $w(\nu)$  für die stimulierte Emission soll derjenigen für thermische Strahlung entsprechen.
- (b) Die spektrale Energiedichte ist gegeben durch

$$w(\nu) = n(\nu) \cdot h\nu \cdot b(\nu); \quad n(\nu) = 8\pi\nu^2/c^3, \quad (1)$$

wobei  $n(\nu)$  die Anzahl Moden ist und  $b(\nu)$  die Besetzungszahl einer Mode. Berechne nun die Besetzungszahl  $b(\nu)$  im Gleichgewicht stimulierter und spontaner Emission.

- (c) Vergleiche für Mikrowellen mit  $\lambda = 3\text{cm}$  und sichtbares Licht mit  $\lambda = 600\text{ nm}$  die Temperatur bei der spontane und stimulierte Emission gleich sind.

**2. Geladener Harmonischer Oszillator (freiwillige Korrektur)**

Nach der klassischen Elektrodynamik strahlt eine oszillierende Ladungsverteilung elektromagnetische Wellen ab. Dieses Konzept soll nun auf eine quantenmechanische Ladungsverteilung angewendet werden.

Für ein Elektron mit Ladung  $-e$ , dessen Zustand durch die Wellenfunktion  $\psi(\vec{r}, t)$  beschrieben wird, ist die Ladungsdichteverteilung  $\rho(\vec{r}, t)$  gegeben durch

$$\rho(\vec{r}, t) = -e\psi^*\psi. \quad (2)$$

Als Beispiel betrachten wir nun einen eindimensionalen harmonischen Oszillator, mit  $\psi(x, t=0) = c_0u_0(x) + c_1u_1(x)$ , wobei  $u_0(x)$  und  $u_1(x)$  die Wellenfunktionen für den Grundzustand, respektive den ersten angeregten Zustand sind.

- (a) Leite mit Hilfe der allgemeinen Lösung der zeitabhängigen Schrödinger Gleichung  $\psi(x, t)$  und  $\rho(x, t)$  für die gegebene Anfangsbedingung her.
- (b) Berechne  $\psi(x, t_i)$  und  $\rho(x, t_i)$  (und mache eine Skizze davon) im Spezialfall  $c_0 = c_1 = 1/\sqrt{2}$  für  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = \pi\hbar/(E_1 - E_0)$  und  $t_2 = 2\pi\hbar/(E_1 - E_0)$  ( $E_0, E_1$  sind die Energien der Zustände  $u_0$  und  $u_1$ ). Was fällt auf beim Vergleich von  $\rho(x, t_0)$  mit  $\rho(x, t_2)$ ?

### 3. Matrixelement des elektrischen Dipolübergangs\*

Wir betrachten wieder einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit derselben Notation wie in Aufgabe 2 und wollen nun den Übergang vom angeregten Zustand in den Grundzustand beschreiben, der durch ein elektrisches Feld induziert wird, also stimulierte Emission.

Dazu gehen wir wiederum von einer Überlagerung  $\psi(x, t) = c_0(t)u_0(x)e^{-iE_0t/\hbar} + c_1(t)u_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}$  aus, nehmen nun aber an, dass sich das Elektron zur Zeit  $t = 0$  im angeregten Zustand befindet, d.h.  $c_0(0) = 0$ ,  $c_1(0) = 1$ . Eine elektromagnetische Welle übt nun auf das Elektron eine Störkraft  $F_x(t) = -eA \cos(\omega t)$  aus, was mit der Beziehung  $F_x = -\partial V_s/\partial x$  das Störpotential  $V_s(x, t) = eAx \cos(\omega t)$  ergibt. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  werde nun diese Störung eingeschaltet, d.h. für  $t > 0$  gilt die Schrödingergleichung

$$(\hat{H} + V_s)\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (3)$$

wobei  $\hat{H}$  der Hamiltonoperator für den Harmonischen Oszillator ist (dessen explizite Form für das Lösen der Aufgabe nicht bekannt sein muss).

- (a) Setze den Ansatz  $\psi(x, t) = c_0(t)u_0(x)e^{-iE_0t/\hbar} + c_1(t)u_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}$  in die Schrödingergleichung des gestörten Systems ein und leite eine Differentialgleichung für die Zeitabhängigkeit der Koeffizienten  $c_0$  und  $c_1$  her. Benutze dazu, dass  $u_0(x)e^{-iE_0t/\hbar}$  und  $u_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}$  Lösungen der Schrödingergleichung für das ungestörte System sind.
- (b) Zeige mit dieser Gleichung, dass für den Koeffizienten  $c_0$  gilt:

$$\frac{dc_0}{dt} \approx \frac{-i}{\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_0 - E_1)t\right) eA \cos(\omega t) \int u_0(x)^* x u_1(x) dx. \quad (4)$$

Tipp: Multipliziere die in (a) erhaltene Gleichung von links mit  $(u_0(x)e^{-iE_0t/\hbar})^*$  und integriere beide Seiten der Gleichung. Nehme weiter an, dass  $c_0 \ll 1$  und  $c_1 \approx 1$ .

Man bezeichnet  $\int u_0(x)^* x u_1(x) dx$  als Matrixelement des elektrischen Dipolübergangs  $1 \rightarrow 0$ .