Energie des Spins im räumlich homogenen $\vec{B}$:

$$V_s = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \tag{14.37}$$

Quantenmechanik → ersetze klassische Grössen mit entspr. Operatoren

$$\vec{\mu} \to -\frac{e}{m_0}\vec{\sigma} \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{e}{m_0}\vec{B}\cdot\hat{\vec{s}}|\psi\rangle = E|\psi\rangle} \quad \text{Schrödinger Gl. Spin} \tag{14.38}$$

Spin Wellenfunktion

oder in Komponenten ausgeschrieben:

$$\frac{e}{m_0}\left(B_x\sigma_x + B_y\sigma_y + B_z\sigma_z\right)|s\rangle \tag{14.39}$$

Pauli Matrizen: Operatoren

in Matrix Komponenten ausgeschrieben:

$$\frac{e\hbar}{2m_e}\begin{pmatrix} B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & -B_z \end{pmatrix}|s\rangle \tag{14.40}$$

für $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix}$ gilt: $\frac{e\hbar}{2m_e}\begin{pmatrix} B_z & 0 \\ 0 & -B_z \end{pmatrix}|s\rangle = E|s\rangle$ (14.41)

d.h. $E = \pm\frac{e\hbar}{2m_e}$ für $|\uparrow\rangle$ bzw. $|\downarrow\rangle$ (14.42)

d.h. Energie eines Spins parallel oder antiparallel zum externen $\vec{B}$ ist gerade was man klassisch erwartet.

analog: zeitabhängige Schrödinger Gleichung

$$\boxed{\frac{e}{m_e}\vec{B}\cdot\vec{\sigma}|\psi\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle}$$

speziell für zeitabhängige $B$'s nützlich

## 14.2.4. Spinpräzession

im konstanten Magnetfeld $\vec{B} = \begin{pmatrix}0\\0\\B_z\end{pmatrix}$

$$\mu_B B_z \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}|\psi\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle \qquad (14.44)$$

$|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ vollständige Basis des Hilbertraumes → allgemeine Lösung kann geschrieben werden als Überlagerung von $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$. Ansatz:

$$|\psi(t)\rangle = \underbrace{a e^{-i\omega_0 t/2}}_{\alpha}|\uparrow\rangle + \underbrace{b e^{i\omega_0 t/2}}_{\beta}|\downarrow\rangle = \alpha|\uparrow\rangle+\beta|\downarrow\rangle \qquad (14.46)$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} \qquad (14.48/9)$$

mit $\omega_0 = \frac{e}{m_e}B_z$. Natürlich muss $|\psi(t)\rangle$ – wie immer – normiert sein:

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 1, \text{ d.h. } |a|^2+|b|^2 = 1 \qquad (14.47)$$

physikalisch zugänglich, d.h. messbar: Erwartungswert (Observable) $\langle\hat{O}\rangle = \langle s|\hat{O}|s\rangle$

bis jetzt: $\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle = \int d\vec{x}\, \psi^*(\vec{x})\,\hat{O}\,\psi(x)$

↑ Integral über Hilbertraum: hier $\infty$-dimensional
Spin: 2-dimensional →

z.B.: $\langle s|\hat{\sigma}_z|s\rangle = (\alpha^*\ \beta^*)\,\hat{\sigma}_z\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ d.h. für $|s\rangle = \alpha|\uparrow\rangle+\beta|\downarrow\rangle$, $\hat{O} = \sigma_z$

$$= (\alpha^*\ \beta^*)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$$

$$\langle\sigma_z\rangle = \left(|\alpha|^2-|\beta|^2\right)\frac{\hbar}{2} \qquad (14.53)$$

Analog (→ einfache, fakultative Übungsaufgabe)

$$\langle\sigma_x\rangle = \frac{\hbar}{2}\left(\alpha^*\beta+\alpha\beta^*\right) \qquad (14.54)$$

$$\langle\sigma_y\rangle = \frac{\hbar}{2}i\left(\alpha\beta^*-\alpha^*\beta\right) \qquad (14.55)$$

verwende Definition $\alpha = a e^{-i\omega_0 t/2}$, $\beta = \dots$, nehme $a, b$ reell an (alles wesentliche sichtbar)

$$\boxed{\begin{array}{l}\langle\sigma_z\rangle = \frac{\hbar}{2}(a^2-b^2) \equiv \text{zeitlich konstant}\\ \left.\begin{array}{l}\langle\sigma_x\rangle = ab\hbar\cos(\omega_0 t)\\ \langle\sigma_y\rangle = ab\hbar\sin(\omega_0 t)\end{array}\right\}\text{rotiert mit } \omega_0 \text{ in x-y Ebene}\end{array}}$$

⇒ Spin führt Präzessionsbewegung durch!