Physik IV SS 2007
Blatt 7 Abgabe: Freitag 01.06.2007

1. Vergleich der spontanen und stimulierten Emission

(a) Bei welcher Temperatur ist die Wahrscheinlichkeit für stimulierte Emission gleich derjenigen für spontane Emission? Betrachte dazu eine elektromagnetische Welle im thermischen Gleichgewicht mit dem thermischen Strahlungsfeld, d.h. die spektrale Energiedichte $w(\nu)$ für die stimulierte Emission soll derjenigen für thermische Strahlung entsprechen.

(b) Die spektrale Energiedichte ist gegeben durch

$$w(\nu) = n(\nu) \cdot h\nu \cdot b(\nu); \;\; n(\nu) = 8\pi\nu^2/c^3, \tag{1}$$

wobei $n(\nu)$ die Anzahl Moden ist und $b(\nu)$ die Besetzungszahl einer Mode. Berechne nun die Besetzungszahl $b(\nu)$ im Gleichgewicht stimulierter und spontaner Emission.

(c) Vergleiche für Mikrowellen mit $\lambda = 3cm$ und sichtbares Licht mit $\lambda = 600nm$ die Temperatur bei der spontane und stimulierte Emission gleich sind.

2. Geladener Harmonischer Oszillator *

Nach der klassischen Elektrodynamik strahlt eine oszillierende Ladungsverteilung elektromagnetische Wellen ab. Dieses Konzept soll nun auf eine quantenmechanische Ladungsverteilung angewendet werden.
Für ein Elektron mit Ladung $-e$, dessen Zustand durch die Wellenfunktion $\psi(\vec{r}, t)$ beschrieben wird, ist die Ladungsdichteverteilung $\rho(\vec{r}, t)$ gegeben durch

$$\rho(\vec{r}, t) = -e\psi^*\psi. \tag{2}$$

Als Beispiel betrachten wir nun einen eindimensionalen harmonischen Oszillator, mit $\psi(x, t = 0) = c_0u_0(x) + c_1u_1(x)$, wobei $u_0(x)$ und $u_1(x)$ die Wellenfunktionen für den Grundzustand, respektive den ersten angeregten Zustand sind.

(a) Leite mit Hilfe der allgemeinen Lösung der zeitabhängigen Schrödinger Gleichung $\psi(x, t)$ und $\rho(x, t)$ für die gegebene Anfangsbedingung her.

(b) Berechne $\psi(x, t_i)$ und $\rho(x, t_i)$ (und mache eine Skizze davon) im Spezialfall $c_0 = c_1 = 1/\sqrt{2}$ für $t_0 = 0$, $t_1 = \pi\hbar/(E_1 - E_0)$ und $t_2 = 2\pi\hbar/(E_1 - E_0)$ (E_0, E_1 sind die Energien der Zustände u_0 und u_1). Was fällt auf beim Vergleich von $\rho(x, t_0)$ mit $\rho(x, t_2)$?

3. Matrixelement des elektrischen Dipolüberganges

Wir betrachten wieder einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit derselben Notation wie in Aufgabe 2 und wollen nun den Übergang vom angeregten Zustand in den Grundzustand beschreiben, der durch ein elektrisches Feld induziert wird, also stimulierte Emission.
Dazu gehen wir wiederum von einer Überlagerung $\psi(x,t) = c_0(t)u_0(x)e^{-iE_0t/\hbar} + c_1(t)u_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}$ aus, nehmen nun aber an, dass sich das Elektron zur Zeit $t = 0$ im angeregten Zustand befindet, d.h. $c_0(0) = 0$, $c_1(0) = 1$. Eine elektromagnetische Welle übt nun auf das Elektron eine Störkraft $F_x(t) = -eA\cos(\omega t)$ aus, was mit der Beziehung $F_x = -\partial V_s/\partial x$ das Störpotential $V_s(x,t) = eAx\cos(\omega t)$ ergibt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde nun diese Störung eingeschaltet, d.h. für $t > 0$ gilt folgende Schrödingergleichung

$$(\hat{H} + V_s)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{3}$$

wobei $\hat{H}$ der Hamiltonoperator für den Harmonischen Oszillator ist (dessen explizite Form für das Lösen der Aufgabe nicht bekannt sein muss).

(a) Setze den Ansatz $\psi(x,t) = c_0(t)u_0(x)e^{-iE_0t/\hbar} + c_1(t)u_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}$ in die Schrödingerleichung des gestörten Systems ein und leite eine Differentialgleichung für die Zeitabhängigkeit der Koeffizienten c_0 und c_1 her. Benutze dazu, dass $u_0(x)e^{-iE_0t/\hbar}$ und $u_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}$ Lösungen der Schrödingergleichung für das ungestörte System sind.

(b) Zeige mit dieser Gleichung, dass für den Koeffizienten c_0 gilt:

$$\frac{dc_0}{dt} \approx \frac{-i}{\hbar}\exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_0 - E_1)t\right) eA\cos(\omega t)\int u_0(x)^* x u_1(x)dx. \tag{4}$$

Tipp: Multipliziere die in (a) erhaltene Gleichung von links mit $(u_0(x)e^{-iE_0t/\hbar})^*$ und integriere beide Seiten der Gleichung. Nehme weiter an, dass $c_0 \ll 1$ und $c_1 \approx 1$.

Man bezeichnet $\int u_0(x)^* x u_1(x)dx$ als Matrixelement des elektrischen Dipolüberganges $1 \to 0$.