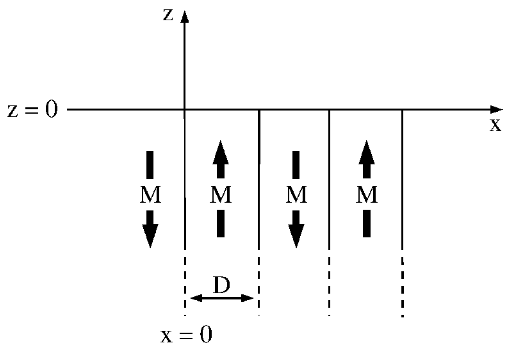
Physik IV SS 2007
Blatt 5 Abgabe: Montag 21.05.07 (**12.00 Uhr**)

Betrachte eine statische, unendliche, periodische Reihe von alternierenden magnetischen Momenten $\vec{M}$, an der Oberfläche ($z = 0$) einer halb-unendlichen Probe. Schreiben wir das magnetische Feld $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$, wobei

$$\vec{M}(x,z) = \begin{cases} 0, \text{ für } z > 0 \\ M\hat{z}, \text{ für } z \leq 0 \text{ und } 2nD < x \leq (2n+1)D \\ -M\hat{z}, \text{ für } z \leq 0 \text{ und } (2n+1)D < x \leq (2n+2)D, \end{cases} \tag{1}$$

$n = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$



1. Magnetische Domäne – Laplacegleichung

Wenn das magnetische Feld statisch ist ($\partial\vec{B}/\partial t = 0$), gilt $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$, d.h. das elektrische Feld ist konservativ. Man kann es also als Gradient eines Potentials ϕ_e schreiben: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi_e$. N.B. $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi = 0$ für jeden Skalar ϕ. Wenn $\vec{\nabla}\times\vec{H} = 0$, können wir also auf ähnliche Weise ein magnetisches Potential ϕ_m einführen: $\vec{H} = -\vec{\nabla}\phi_m$.

(a) Argumentiere mit Benutzung der Maxwell'schen Gleichungen, dass im oben gezeichneten Fall $\vec{\nabla}\times\vec{H} = 0$.

(b) Zeige dass $\nabla^2\phi_m = 0$ (Laplacegleichung), für $z \neq 0$, $x \neq nD$.

2. Magnetische Domäne – Randbedingungen

(a) Sind B_x und H_x stetig an der Oberfläche ($z = 0$)? D.h., gilt $\lim_{z\to 0^+} B_x(x,z) = \lim_{z\to 0^-} B_x(x,z)$ bzw. $\lim_{z\to 0^+} H_x(x,z) = \lim_{z\to 0^-} H_x(x,z)$?

(b) Sind B_z und H_z stetig an der Oberfläche ($z = 0$)?

(c) Leite die Randbedingungen für $\phi_m(x, z)$ bei $z = 0$ her:

$$\lim_{z\to 0^+} \frac{\partial \phi_m}{\partial x} = \lim_{z\to 0^-} \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \tag{2}$$

und

$$\lim_{z\to 0^+} \left\{-\frac{\partial \phi_m}{\partial z}\right\} = \begin{cases} \lim_{z\to 0^-} \left\{-\frac{\partial \phi_m}{\partial z}\right\} + M, & \text{für } 2nD < x \le (2n+1)D \\ \lim_{z\to 0^-} \left\{-\frac{\partial \phi_m}{\partial z}\right\} - M, & \text{für } (2n+1)D < x \le (2n+2)D, \end{cases} \tag{3}$$

$n = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$

3. Magnetische Domäne – Lösen der Laplacegleichung *

(a) Motiviere den Ansatz

$$\phi_m(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l(z) \sin(lkx), \tag{4}$$

wobei $A_l(z)$ Funktionen von z sind, und $k = 2\pi/2D$.

(b) Setzte $\phi_m(x, z)$ in die Laplacegleichung ein, und leite die Differentialgleichung für $A_l(z)$ her.

(c) Weil die Laplacegleichung in diesem Problem nicht für $z = 0$ definiert ist, muss man zwei Fälle betrachten: $A_l(z) = A_l^>(z)$ für $z > 0$ und $A_l(z) = A_l^<(z)$ für $z < 0$. Aus der Differentialgleichung für $A_l(z)$ folgen für $A_l^>(z)$ und $A_l^<(z)$ je zwei mögliche exponentiele Funktionen. Welche sind physikalisch relevant?

(d) Verwende die Randbedingung (2), was folgt hieraus für $A_l^>(0)$ und $A_l^<(0)$?

(e) Verwende die Randbedingung (3), finde explizite Ausdrücke für $A_l^>(z)$ und $A_l^<(z)$, und zeige dass

$$\phi_m(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2MD}{(2n+1)^2\pi^2} \exp\Big(-\frac{(2n+1)\pi|z|}{D}\Big) \sin\Big(\frac{(2n+1)\pi x}{D}\Big). \tag{5}$$

Hinweise: $\phi_m(x, z)$ einsetzen in (3), links und rechts mit $\sum_{p=0}^{\infty} \sin(pkx)$ multiplizieren, über eine Periode (z.B. von $-D$ bis D) integrieren, und verwenden, dass $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(ly)\sin(py)dy = 0$ für $l \neq p$ ($l, p = 0, 1, 2, ...$).

(f) Leite $\vec{H}$ und $\vec{B}$ her und mache eine Skizze der Felder.

(g) Wie ändert die z-Abhängigkeit von ϕ_m und $\vec{H}$ mit der Grösse der Domänen?