Physik IV FS 2010
Blatt 9 Abgabe: Donnerstag, 06.05.2010

1. Dynamik eines Spins im äusseren Magnetfeld

Aus der Vorlesung sind zur Darstellung des Elektronenspins die Spinwellenfunktionen bekannt:

$$\psi_\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi_\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Analog zur Schrödingergleichung für Orstwellenfunktionen kann man die Schrödingergleichung für Spinnwellenfunktionen aufstellen:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{e}{m}\vec{B}\hat{s}\psi \qquad \text{mit } \hat{s} = (\hbar/2)\vec{\sigma}$$

Die stationären Lösungen sind dann durch die folgenden Eigenwertgleichungen gegeben:

$$E\psi_s = \frac{e}{m}\vec{B}\hat{s}\psi_s \qquad \text{mit } \psi_s = \alpha\psi_\uparrow + \beta\psi_\downarrow$$

a) Finde für den Fall eines zeitunabhängigen Magnetfeldes in x-Richtung die Eigenzustände und Eigenwerte.

Der Spin befinde sich nun in einem Magnetfeld $\vec{B} = \vec{B_0} + \vec{B_s}(t)$, das sich aus einem sogenannten Haltefeld in z-Richtung $\vec{B_0} = (0, 0, B_0)$ und einem zeitveränderlichen Anteil $\vec{B_s}(t) = (B_{s,x}(t), B_{s,y}(t), 0)$ zusammen setzt. Das $\vec{B_s}(t)$-Feld rotiere mit der sogenannten Larmorfrequenz $\omega_0 = e/m \cdot B_0 = 2/\hbar \cdot \mu_B \cdot B_0$ um die z-Achse:

$$B_{s,x}(t) = B_s \cos(\omega_0 t) \text{ und } B_{s,y}(t) = B_s \sin(\omega_0 t).$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei $\psi(0) = \psi_\uparrow$.

b) Löse die zeitabhängige Schrödingergleichung für die Spinwellenfunktionen und berechne die Zeitentwicklung der Erwartungswerte $\langle \hat{s}_x \rangle$,$\langle \hat{s}_y \rangle$ und $\langle \hat{s}_z \rangle$. Skizziere

das Ergebnis.
Hinweis: Benutze den Ansatz

$$\psi(t) = a(t)e^{-i\omega_0 t/2}\psi_\uparrow + b(t)e^{+i\omega_0 t/2}\psi_\downarrow$$

c) Wenn der Spin im Magnetfeld zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $\psi_\uparrow$ ist, nach welcher Zeit ist er dann im Zustand $\psi_\downarrow$?

2. Paulimatrizen

a) Benutze die Paulimatrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

und zeige die folgenden Identitäten:

i) $\sigma_i \sigma_k = i\epsilon_{ikl}\sigma_l + \delta_{ik}$

ii) $[\sigma_i, \sigma_k]_+ = 2\delta_{ik} \qquad ([A,B]_+ \equiv AB + BA)$

iii) $\vec{a} \times \vec{\sigma} = i(\vec{a} - \vec{\sigma}(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})) \qquad (\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3)$

iv) $\vec{\sigma} \times (\vec{a} \times \vec{\sigma}) = \vec{a} + \vec{\sigma}(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})$

b) Eine weitere nützliche Eigenschaft der Paulimatrizen ist, dass gilt: $(\vec{\sigma}\cdot\mathbf{A})(\vec{\sigma}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + i\vec{\sigma}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$. Dabei können $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ beliebige Vektoroperatoren sein, solange sie mit $\hat{\mathbf{S}}$ vertauschen. Beweise diese Beziehung.

c) Der Darsteller des unitären Operators $\hat{U} = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{\mathbf{S}}\vec{\alpha}}$, der eine Drehung um die α-Achse mit Drehwinkel $|\vec{\alpha}|$ beschreibt, ist im Unterraum $\hat{\mathbf{S}}^2 = 3\hbar^2/4$ gegeben durch $e^{i\vec{\sigma}\cdot\vec{\alpha}/2}$. Zeige:

$$e^{i\vec{\sigma}\cdot\vec{\alpha}/2} = \cos(\alpha/2) + i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}\sin(\alpha/2). \tag{2}$$

(Hinweis: Entwickle die Exponentialfunktion und verwende die Beziehung aus Teilaufgabe b.) Wie wird eine Drehung um 2π dargestellt?

d) Die Paulimatrizen zusammen mit der (2,2)-Einheitsmatrix bilden eine Basis in der Algebra der (2,2)-Matrizen. Zeige, dass man jede (2,2)-Matrix in der Form $\mathbf{A} = \lambda\mathbb{1} + \mu\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$ schreiben kann, wobei $\vec{n}$ ein Einheitsvektor ist und $\lambda \pm \mu$ die beiden Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind.

e) Mache dir klar, dass man zu jedem Vektor $|\psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$ in dem zweidimensionalen Eigenraum zu $\hat{\mathbf{S}}^2 = 3\hbar^2/4$ und $\hat{S}_z$ eine Richtung finden kann (charakterisiert durch einen Einheitsvektor $\vec{n}$), so dass $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand zu $\hat{\mathbf{S}}\cdot\vec{n}$ ist mit Eigenwert $\hbar/2$.

3. Dynamik eines Elektronspins*

Es sei ein äusseres Magnetfeld von 1 T in der ẑ-Richtung angelegt.

a) Auf der Blochsphäre zeige ein Spin

   i) zum Nordpol,

   ii) zum Südpol,

   iii) in Richtung x̂ auf dem Äquator,

   iv) in Richtung ŷ auf dem Äquator.

   Was sind die zugehörigen Spinwellenfunktionen in der $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ Basis?

b) Was sind die Energien der Zustände

   i) $\psi = |\uparrow\rangle$

   ii) $\psi = |\downarrow\rangle$

   iii) $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$

   (Symbole genügen, nicht numerisch ausrechnen)

c) Ein Elektron befinde sich zur Zeit $t = 0$ in der Spinwellenfunktion

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) . \tag{3}$$

   Berechne die Dynamik des Spins.

   i) Schreibe dazu die zeitabhängige Schrödingergleichung in Komponentenform auf.

   ii) Führe $\omega_0 = e/m$ ein und löse die Differentialgleichung um $|\psi(t)\rangle$ zu berechnen. (2 Punkte)

   iii) Was erhält man bei einer Messung der x-, y- und z-Spinkomponente und der Energie vom Zustand $|\psi(t)\rangle$?