

1. Paulimatrizen

a) Benutze die Paulimatrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

und zeige die folgenden Identitäten:

i) $\sigma_i \sigma_k = i \epsilon_{ikl} \sigma_l + \delta_{ik}$

ii) $[\sigma_i, \sigma_k]_+ = 2\delta_{ik} \quad ([A, B]_+ \equiv AB + BA)$

iii) $\vec{a} \times \vec{\sigma} = i(\vec{a} - \vec{\sigma}(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})) \quad (\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3)$

iv) $\vec{\sigma} \times (\vec{a} \times \vec{\sigma}) = \vec{a} + \vec{\sigma}(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})$

b) Eine weitere nützliche Eigenschaft der Paulimatrizen ist, dass gilt: $(\vec{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\vec{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\vec{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$. Dabei können \mathbf{A} und \mathbf{B} beliebige Vektoroperatoren sein, solange sie mit $\hat{\mathbf{S}}$ vertauschen. Beweise diese Beziehung.

c) Der Darsteller des unitären Operators $\hat{U} = e^{i\frac{\hat{\mathbf{S}} \cdot \vec{\alpha}}{\hbar}}$, der eine Drehung um die α -Achse mit Drehwinkel $|\vec{\alpha}|$ beschreibt, ist im Unterraum $\hat{\mathbf{S}}^2 = 3\hbar^2/4$ gegeben durch $e^{i\vec{\sigma} \cdot \vec{\alpha}/2}$. Zeige:

$$e^{i\vec{\sigma} \cdot \vec{\alpha}/2} = \cos(\alpha/2) + i \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|} \sin(\alpha/2). \quad (2)$$

(Hinweis: Entwickle die Exponentialfunktion und verwende die Beziehung aus Teilaufgabe b.) Wie wird eine Drehung um 2π dargestellt?

d) Die Paulimatrizen zusammen mit der (2,2)-Einheitsmatrix bilden eine Basis in der Algebra der (2,2)-Matrizen. Zeige, dass man jede (2,2)-Matrix in der Form $\mathbf{A} = \lambda \mathbb{1} + \mu \vec{n} \cdot \vec{\sigma}$ schreiben kann, wobei \vec{n} ein Einheitsvektor ist und $\lambda \pm \mu$ die beiden Eigenwerte von \mathbf{A} sind.

e) Mache dir klar, dass man zu jedem Vektor $|\psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$ in dem zweidimensionalen Eigenraum zu $\hat{\mathbf{S}}^2 = 3\hbar^2/4$ und \hat{S}_z eine Richtung finden kann (charakterisiert durch einen Einheitsvektor \vec{n}), so dass $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand zu $\hat{\mathbf{S}} \cdot \vec{n}$ ist mit Eigenwert $\hbar/2$.

2. Dynamik eines Elektronspins

Es sei ein äusseres Magnetfeld von 1 T in der \hat{z} -Richtung angelegt.

- a) Auf der Blochsphäre zeige ein Spin
- i) zum Nordpol,
 - ii) zum Südpol,
 - iii) in Richtung \hat{x} auf dem Äquator,
 - iv) in Richtung \hat{y} auf dem Äquator.

Was sind die zugehörigen Spinwellenfunktionen in der $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ Basis?

- b) Was sind die Energien der Zustände

- i) $\psi = |\uparrow\rangle$
- ii) $\psi = |\downarrow\rangle$
- iii) $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$

(Symbole genügen, nicht numerisch ausrechnen)

- c) Ein Elektron befinde sich zur Zeit $t = 0$ in der Spinwellenfunktion

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle). \quad (3)$$

Berechne die Dynamik des Spins.

- i) Schreibe dazu die zeitabhängige Schrödingergleichung in Komponentenform auf.
- ii) Führe $\omega_0 = e/m$ ein und löse die Differentialgleichung um $|\psi(t)\rangle$ zu berechnen. (2 Punkte)
- iii) Was erhält man bei einer Messung der x-, y- und z-Spinkomponente und der Energie vom Zustand $|\psi(t)\rangle$?

3. Kohärenz, Relaxation und Resonanz eines Elektronspins

Es sei ein äusseres Magnetfeld von 1 T in der \hat{z} -Richtung angelegt.

- a) Schreibe die Blochsche Gleichung für den Elektronenspin auf und schreibe sie in Komponenten aus, unter Verwendung von $x = x(t) = \langle \hat{s}_x \rangle$, $y = y(t) = \langle \hat{s}_y \rangle$ und $z = z(t) = \langle \hat{s}_z \rangle$, und löse die Differentialgleichung mit Anfangsbedingung (3).
- b) Nun wollen wir eine phänomenologische Wechselwirkung des Elektronspins mit der Umgebung einführen indem wir eine endliche Spin-Relaxationszeit $T_1 < \infty$ annehmen.
 - i) Was ist der Zeitbereich möglicher Kohärenzzeiten T_2 ?
 - ii) Was ist die Bedeutung der Kohärenzzeit T_2 (im Gegensatz zu T_1)?
 - iii) Wir nehmen nun an, dass ein thermodynamisches Gleichgewicht vorherrscht und dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Spin im Grundzustand ist 90% ist. Bei welcher Temperatur ist das erfüllt?
 - iv) Schreibe nun wieder die Blochschen Gleichungen auf unter der Annahme, dass für $t \rightarrow \infty$ das in iii) erwähnte Gleichgewicht erreicht wird, aber unter Berücksichtigung einer allgemeinen Relaxationszeit T_1 und einer allgemeinen Kohärenzzeit T_2 . Schreibe die Blochschen Gleichungen in Komponenten aus und löse die gekoppelte Differentialgleichung, wieder mit Anfangsbedingung (3). Wie unterscheidet sich nun die Spin Dynamik für $T_1 = T_2 = \infty$ und $T_1 < \infty, T_2 < \infty$?
- c) Es sei immer noch ein äusseres Magnetfeld von 1 T in der \hat{z} -Richtung angelegt. Wie koennte man Elektron Spin Resonanz erreichen? Beschreibe dazu i) die Richtung und ii) die Frequenz des zusätzlich anzulegenden Magnetfeldes. Was ist die Rabifrequenz und wodurch ist sie bestimmt?