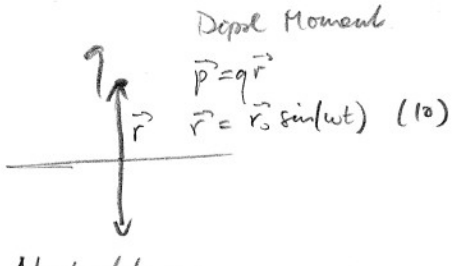
# Dipolstrahlung

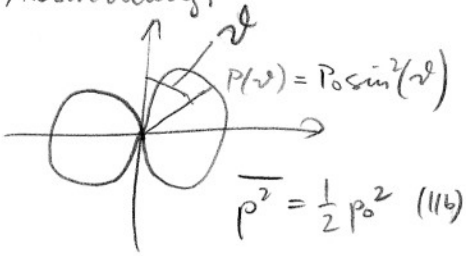
klassische Erzeugung Strahlung: Dipol




Abstrahlung über alle Winkel $\vartheta$ gemittelt: $\overline{P} = \frac{2}{3} \frac{\overline{p^2}\,\omega^4}{4\pi\varepsilon_0 c^3}$ (11)

(Annahme $\lambda \gg |\vec{r}_0|$, Dipolnäherung)

Abstrahlung:

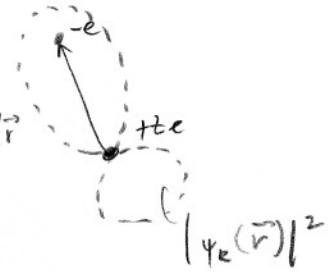



$\overline{p^2} = \frac{1}{2} p_0^2$ (11b)

quantenmechanisch: $\overline{p^2} \longrightarrow \langle p^2 \rangle$

klassischer Mittelwert — qm Erwartungswert des el. Dipolmomentes

$\langle \vec{r}_k \rangle = \int \psi_k^* \vec{r} \psi_k d\vec{r}$




$$\langle p \rangle = e\langle r \rangle = e\int d\vec{r}\; \psi_i^*(\vec{r})\, \vec{r}\, \psi_k(\vec{r}) \qquad (12)$$

$\psi_\alpha(\vec{r})$ Wellenfunktion zum Zustand mit Quantenzahlen $\alpha = (n_\alpha, l_\alpha, m_{l_\alpha}, m_{s_\alpha})$
($\alpha = i$ und $k$) (z.B. H-Atom)

$\int d\vec{r}$ Integration über Raumkoordinaten Elektron
$d\vec{r} = dx\,dy\,dz$ oder $dr = r^2 dr \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$

(13) $\langle p \rangle =: \boxed{M_{ik} = e\int d\vec{r}\, \psi_i^* \, \vec{r}\, \psi_k}$ hängt von $i, k$ ab: Matrixelement „Übergangsmatrixelement"

wobei $M_{ik} = M_{ki}^*$
$|M_{ik}| = |M_{ki}|$
$\Rightarrow B_{ik} = B_{ki}$

ersetze $\overline{p^2} = \frac{1}{2}(p_0)^2 \longrightarrow 2\,|M_{ik}|^2$ in (11)

$$\Rightarrow \quad \overline{P} = \frac{4}{3} \frac{\omega_{ik}^4}{4\pi\varepsilon_0 c^3} |M_{ik}|^2 = \text{mittlere Leistung / Atom} \qquad (15)$$

gemäss Definition von $A_{ik}$ via mittlere emittierte Leistung $= A_{ik} h\nu_{ik}$ (16)

$$\boxed{A_{ik} = \frac{2}{3} \frac{\omega_{ik}^3}{\varepsilon_0 c^3 h} |M_{ik}|^2} \qquad (17)$$

Einstein-Koeffizient Spontane Emission

Übergangswahrscheinlichkeit pro Sekunde

unabhängig von Strahlungsfeld $w(\nu)$

quantenmechanische motivation Dipol übergangsmatrixelemente 

(18) $H \hat{\mathcal{H}}\psi = \cancel{\left(\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)}\psi = E\psi$ stationäre Schrödinger Gl. / Eigenwert problem

(19) $H \hat{\mathcal{H}}\psi = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}$ zeitabhängige Schrödinger Gl.

Sei $H = H_0 + V'(x,t)$ mit $V'(x,t)$: Störpotential

$H_0 = \frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x)$, ungestörter Hamiltonian ~~2 Niveaus Situation~~

Sei $H\psi_\alpha = E_\alpha\psi_\alpha$ und $H\psi_\beta = E_\beta\psi_\beta$

$\psi_\alpha = u_\alpha(x,y,z)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_\alpha t}$ $\quad \psi_\beta = u_\beta(x,y,z)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_\beta t}$

$\Psi = c_\alpha\psi_\alpha + c_\beta\psi_\beta$ ist auch Lsg von $H_0\psi = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}$ mit $c_{\alpha,\beta}$ zeitunabhängig, aber nicht mehr von $H\psi = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}$

finde Lsg., bzw Näherungslösung ($\to$ Übungen) $\overset{*}{\Rightarrow}$

mit Randbed. $c_\alpha = 1$, $c_\beta = 0$ @ $t=0$, $\Rightarrow$ finde $c_\beta(t)$ $\Rightarrow$ Dipolmatrix el.

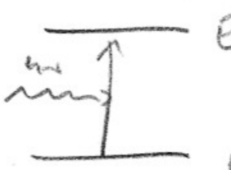
$$\frac{dc_\beta}{dt} \simeq +\frac{i}{\hbar}\, e^{\frac{i}{\hbar}(E_\beta - E_\alpha)t}\, E_0\cos(\omega t)\, M_{\beta\alpha} \qquad \omega_{\beta\alpha} = \frac{E_\beta - E_\alpha}{\hbar}$$

* unter Annahme: – ebene EM Welle
– nur $\vec{E}$-Feld betrachten (nicht $\vec{B}$)
– $\vec{E}$ Feld homogen ($\lambda \gg a_0$)
– ~~Störung~~ Übergang von $\psi_\alpha$ (stationärer Anfangszustand) $\to \psi_\beta$ (stationärer Endzustand)

$$\frac{dc_\beta}{dt} = \frac{i}{2\hbar}E_0 M_{\beta\alpha}\left(e^{i(\omega_{\beta\alpha}+\omega)t} + e^{i(\omega_{\beta\alpha}-\omega)t}\right)$$

$$c_\beta(t) = \int_0^t \frac{dc_\beta}{dt}\,dt = \frac{E_0}{2\hbar}M_{\beta\alpha}\left\{\frac{e^{i(\omega_{\beta\alpha}+\omega)t}-1}{(\omega_{\beta\alpha}+\omega)} + \frac{e^{i(\omega_{\beta\alpha}-\omega)t}-1}{\omega_{\beta\alpha}-\omega}\right\}$$

<u>Absorption</u>



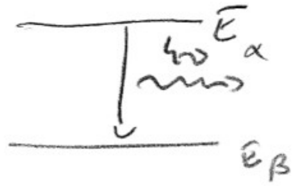
$$\omega_{\beta\alpha} = \frac{E_\beta - E_\alpha}{\hbar} > 0$$

$$\to |\omega_{\beta\alpha}+\omega| \gg |\omega_{\beta\alpha}-\omega| = \Delta\omega$$

$$c_\beta(t) \sim \frac{E_0}{2\hbar}M_{\beta\alpha}\frac{e^{i(\omega_{\beta\alpha}-\omega)t}-1}{\omega_{\beta\alpha}-\omega}$$ , calculate $c^*c$, use $(e^{ix}-1)(e^{-ix}-1) = 2(1-\cos x) = 4\sin^2(\frac{x}{2})$

$$|c_\beta(t)|^2 \sim \frac{E_0^2}{\hbar^2}|M_{\beta\alpha}|^2\frac{\sin^2(\frac{1}{2}\Delta\omega\, t)}{(\Delta\omega)^2}$$

## Emission

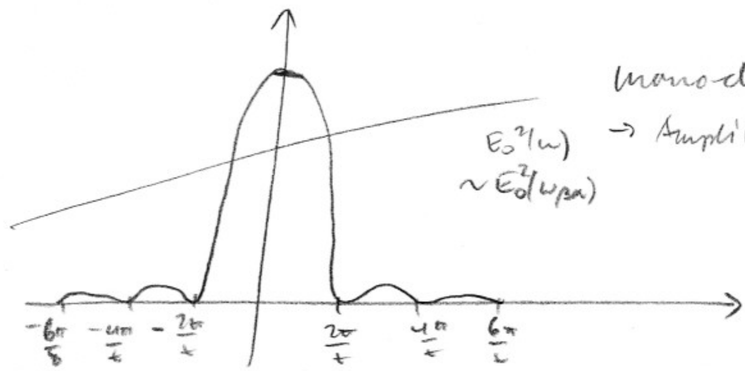



$$\omega_{\beta\alpha} = \frac{E_\beta - E_\alpha}{\hbar} < 0,$$

$$|\omega_{\beta\alpha} - \omega| \gg |\omega_{\beta\alpha} + \omega| = |\Delta\omega|$$

dito Absorption, i.a. same $|c_\beta(t)|^2$

→ $\boxed{\text{Absorption} = \text{Emissionswahrscheinlichkeit}}$




monochrom → Störung so lang eingeschaltet
→ Amplitude gegen Null → Zeit $t \to \infty$

→ δ-peak

→ $\omega_{\beta\alpha} = \omega$

$$\boxed{\hbar\omega = |E_\beta - E_\alpha|}$$

falls Licht kontinuierliches Spektrum: $E^2(\omega) \propto I(\omega)$

Integriere über $\omega$, benutze $E_0^2(\omega) \sim E_0^2(\omega_{\beta\alpha})$, $d\omega = d\Delta\omega$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\omega \, \frac{E_0^2(\omega_{\beta\alpha})\,|M_{\beta\alpha}|^2}{\hbar^2} \, \frac{\sin^2(\frac{1}{2}\Delta\omega t)}{\Delta\omega^2}$$

$$= \frac{E_0^2(\omega_{\beta\alpha})\,|M_{\beta\alpha}|^2}{\hbar^2} \, \frac{t^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{1}{2}\Delta\omega t)}{\frac{1}{2}\Delta\omega t} \, d(\Delta\omega) \qquad \tfrac{1}{2}\Delta\omega t = \xi, \; d\Delta\omega = \tfrac{2}{t} d\xi$$

$$= \frac{E_0^2(\omega_{\beta\alpha})\,|M_{\beta\alpha}|^2}{\hbar^2} \, 2t \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\xi}{\xi^2} \, d\xi}_{\pi} = \frac{\pi E_0^2(\omega_{\beta\alpha})\,|M_{\beta\alpha}|^2}{2\hbar^2} \, t \qquad \to \text{lin. in } t$$

Wahrscheinlichkeit, Atom in $\psi_\beta$ zu finden wächst linear mit Zeit

→ Übergangswahrscheinlichkeit pro sec. $W_{\alpha\beta} = |c_\beta(t)|^2 / t$

$$\boxed{W_{\alpha\beta} = \frac{\pi E_0^2(\omega_{\beta\alpha})\,|M_{\beta\alpha}|^2}{2\hbar^2}}$$

# Herleitung Einstein Koeffizienten



thermisches Strahlungsfeld: inkohärent → addiere Intensitäten / Übergangsraten für einzelne $x, y, z$ Komponenten von $\vec{E}$.

polarisiert $\parallel x$, fortschreitend $\parallel z$, $\mathcal{E}_x = B_y$, E-dichte:

$$\frac{1}{8\pi}\left(\mathcal{E}_x^2 + B_y^2\right) = \frac{1}{4\pi}\,\mathcal{E}_x^2$$

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

$$\overline{\mathcal{E}_x^2} = \frac{1}{2}\,\mathcal{E}_{0x}^2 \quad \text{Zeitmittel}$$

$$w_x(\omega)\,d\omega = \frac{1}{4\pi}\,\mathcal{E}_x^2(\omega)\,d\omega = \frac{1}{8\pi}\,\mathcal{E}_{0x}^2\,d\omega$$

aber im isotropen Feld: $w_x = w_y = w_z = \frac{1}{3} w \rightarrow \mathcal{E}_{0x}^2 = \mathcal{E}_{0y}^2 = \mathcal{E}_{0z}^2 = \frac{8\pi}{3} w(\omega)$

$$\rightarrow W_{\alpha\beta} = W_{\alpha\beta}^x + W_{\alpha\beta}^y + W_{\alpha\beta}^z = \overbrace{\frac{4\pi^2}{3\hbar^2}\underbrace{|M_{\beta\alpha}|^2}_{= |M_{\beta\alpha}^x|^2 + |M_{\beta\alpha}^y|^2 + |M_{\beta\alpha}^z|^2}}^{B_{\beta\alpha}} w(\omega_{\beta\alpha}) \xrightarrow[SI]{} \frac{\pi}{3\varepsilon_0\hbar^2}\,|M_{\beta\alpha}|^2\, w(\omega_{\beta\alpha})$$

$$\boxed{B_{\beta\alpha} = \frac{\pi}{3\varepsilon_0\hbar^2}\,|M_{\beta\alpha}|^2}$$

benutze $A_{ik}$ (17)

$$\frac{A_{ik}}{B_{ik}} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\,\frac{\omega^3}{\cancel{4\pi\varepsilon_0} c^3 \cancel{\hbar}} \cdot \frac{\cancel{3\varepsilon_0}\,\hbar\cancel{\hbar}}{\cancel{\pi}\pi^2}$$

$$= \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} = w(\omega) \rightarrow \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \quad \text{dito vorher}$$

$$w(\omega)\,d\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\,d\omega = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\,d\nu = w(\nu)\,d\nu$$