

# Grundlagen der Quantenphysik

## 1. Superpositionsprinzip, Interferenz (Nach Haken, Wolf, Atom + Quantenphysik, Kap. 23)

Teilchen mit Ortskoordinate  $\vec{r}$ ,  $\psi(\vec{r}, t)$ :  $H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi$

Superposition in der orthonormierten Basis  $f_i(\vec{r})$ :  $Hf_i = E_i f_i$

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_j \underbrace{c_j(t)}_{\substack{\text{Wahrsch.} \\ \text{amplituden}}} f_j(\vec{r}) \quad (1)$$

Wahrscheinlichkeitsamplituden:  $|c_i(t)|^2 =$  Wahrsch., dass Teil. zur Zeit  $t$  im Zustand  $i$  zu finden

Spezialfall: Nur 2 Summanden:  $\psi(\vec{r}, t) = c_1 f_1(\vec{r}) + c_2 f_2(\vec{r}) \quad (2)$

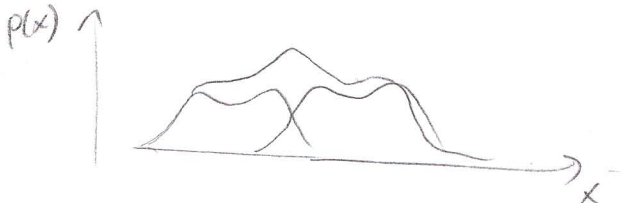
Wahrscheinlichkeit, Teilchen am Ort  $\vec{r}$  zu finden:

$$|\psi(\vec{r})|^2 = |c_1|^2 |f_1(\vec{r})|^2 + |c_2|^2 |f_2(\vec{r})|^2 + \underbrace{c_1^* c_2 f_1^*(\vec{r}) f_2(\vec{r}) + c_2^* c_1 f_2^*(\vec{r}) f_1(\vec{r})}_{\text{Interferenz Terme}} \quad (3)$$

Doppelspalt:



$f_1$ : Wellenfunktion bei 1-Durchgang  
 $f_2$ : " " " 2- "



Zerstörung Interferenzmuster: Messung: durch welchen Spalt geht das Teilchen? genügt!

(Man muss dazu nicht einen der Spalten schließen)

Messung:  $\psi = c_1 f_1 + c_2 f_2 \xrightarrow{\text{Messung z.B.}} \psi = c_2 f_2$ , d.h.  $c_1 = 0 \rightarrow$  Interferenz weg. wurde Experimentell nachgewiesen

Messung: Selektionsprozess, "Kollaps" der Wellenfunktion

klassisch

Trajektorie 1  $\rightarrow p_1(x)$  Verteilung

2  $\rightarrow p_2(x)$  Verteilung

$$p(x) = p_1(x) + p_2(x) \quad (4)$$

keine Transferenz: Unterschied zw. qu. + klassischer Physik

Übergang Quanten Physik  $\rightarrow$  klassische Physik: Elimination Transferenz

Schrödingers Katze

(„When I hear about Schrödinger's cat, I reach for my gun“ - Stephen Hawking)

Schrödinger, (und andere): Schwierigkeiten mit Deutung der Quantentheorie, insbesondere mit dem Messprozess.

Illustration: Katze in einem Kasten, nicht einsehbar (Quantenzustand Katze nicht messbar)  
 ein radioaktives Atom: Zerfall  $\rightarrow$  giftiges Gas wird frei  
 Zerfall: stochastisch, zufälliger Prozess  
 $\rightarrow$  wissen nicht: Ist Katze tot oder lebendig?

$$|\psi_{\text{Katze}}\rangle = c_1 |\text{lebendig}\rangle + c_2 |\text{tot}\rangle \quad (5)$$

(kohärente Überlagerung) erst wenn wir Kasten öffnen und messen, wird  $|\psi_{\text{Katze}}\rangle$  auf entweder  $|\text{tot}\rangle$  oder  $|\text{lebendig}\rangle$  reduziert.

Schrödinger: Zustand Katze (tot oder lebendig) kann ja wohl nicht vom unserem Hinschauen abhängen!  $\rightarrow$  Widerspruch zur Deutung der quantenmechanischen Messung?

Auflösung: Dekohärenz durch Wechselwirkung mit der Umgebung (Wärmebad)  
 Es braucht zur „Messung“ eines Zustandes keinen Beobachter (Menschen mit Bewusstsein), sondern nur eine Wechselwirkung mit Umgebung, welche leicht die quantenmechanische Überlagerung zerstören kann.

Wärmebad Ankopplung: a)  $c_1 = a_1 e^{i\chi_1(t)}$   $c_2 = a_2 e^{i\chi_2(t)}$   $e^{i\chi} = \int dt e^{i\chi} = 0$   
 $|c_1|^2 = |a_1|^2$  unabh. von  $t$ , aber in Transferenzsystem  
 tritt  $\chi$  auf! zerstört Transferenz!

b) auch Relaxationsprozesse  $c_2 \rightarrow 0$  oder  $c_1 \rightarrow 0$  etc

„Umgebung“ der Katze führt in sehr kurzer Zeit „Messung“ durch  $\rightarrow$  Superposition kollabiert.  
 $\rightarrow$  gas Moleküle etc

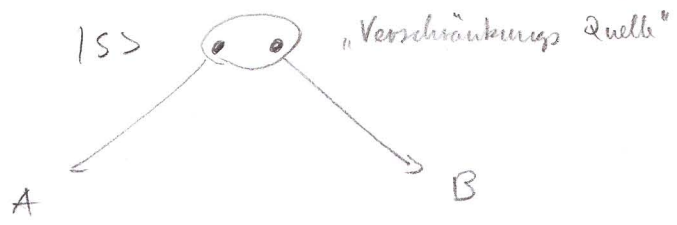
Verschränkung (Schrodinger 1935)

z.B. zwei Spins:  $|\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle = |\uparrow_1\downarrow_2\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle$  etc. (6)

es treten auf:  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle \pm |\downarrow\uparrow\rangle)$  Verschränkter Zustand (7)

lässt sich nicht schreiben als Produkt  $(\dots 1)(\dots 2)$

Man kann in einem verschränkten Zustand die beiden Teildrehen örtlich separieren:



Messung z-Komponente bei A: ergebe z.B.  $|\downarrow\rangle \rightarrow$  bei B wird  $|\uparrow\rangle$  gemessen: (quantenmechanische) Korrelation (und umgekehrt) (8)

es scheint, als würde sich hier Wirkungen mit "Überlichtgeschwindigkeit" ausbreiten  $\rightarrow$  Einstein, das ist wohl unmöglich, (Einstein-Podolsky-Rosen Paradox)

(mit quantenmechanische Korrelationen der Art (8) auch auftreten, wenn die beiden Spins beliebig weit voneinander entfernt sind, d.h. es scheint so, als würden sich Wirkungen mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten, dies ist aber gemäß der speziellen Relativitätstheorie von Einstein unmöglich und erschien Einstein daher suspekt oder falsch (EPR\* Paradoxie))

Daraus schloss Einstein, dass die Quantentheorie "unvollständig" sei, und es müsse "verborgene Parameter" geben, die die Quantenmechanik zu einer "lokalen und kausalen" Theorie machen

\* EPR: Physical Review 47, 777 (1935), cited ~2'000 times

Bellsche Ungleichungen / Hypothese verborgener Parameter

nicht eine quantenmechanische Behauptung, sondern eine "klassische" Überlegung, die aus einer "intuition", d.h. lokaler und kausaler Theorie folgt. Anordnung des Gedankenexperiments



für diesen Aufbau stellen wir uns zuerst aufgrund der klassischen/intuitiven Theorie eine Ungleichung auf. Dann machen wir eine quantenmechanische Analyse und vergleichen die Resultate. Dann: Was ergeben Experimente?

a) klassische Analyse

Quelle erzeugt zwei Teilchen, z.B. Photonen, oder Elektronen, davon werde ein Teilchen zu Alice und das andere zu Bob geschickt. Alice macht eine Messung, der Apparat erlaubt Messung entlang Q oder R, und Alice soll zufällig (Münze) wählen, ob sie die Q oder R Messung macht. Jede Messung ergebe entweder  $Q = +1$  oder  $Q = -1$ , analog R, oder R. Bob analog für S oder T, welche im 50% zu Q und R von Alice seien. A+B Messen gleichzeitig  
 Wiederhole viele male (für viele verschränkte Paare), Resultate aufschreiben, dann treffen sich Alice + Bob und merken folgenden Ausdruck aus:  
 zuerst eine einzelne Messung:

$$QS + RS + RT - QT = (Q+R)S + (R-Q)T \tag{10}$$

Weil  $R = \pm 1$  und dito Q  $\rightarrow$  entweder  $(Q+R) = 0, (R-Q) = \pm 2$   
 oder  $(Q+R) = \pm 2, (R-Q) = 0$  (11)

für (10) bedeutet dies:  $QS + RS + RT - QT = \pm 2$  (12)

für statistische analyse vieler Messungen:

$p(q, r, s, t)$  = Wahrscheinlichkeit, dass Kombination  $(q, r, s, t)$  auftritt  
 gilt:  $\sum_{q,r,s,t} p(q, r, s, t) = 1$  (könnte davon abhängen, wie z.B. 14) der verschränkte Zustand präpariert wird) (13)

((beachte, dass klassisch gesehen jede Messung  $(Q, R, S, T)$  für jeden einzelnen verschränkten Zustand festgelegt sein muss.  $p(q, r, s, t)$  beschreibt dann wie oft diese Kombination vorkommt.))

$E(\dots)$  sei der Mittelwert über viele Messungen (14)

definiert via:  $E(f(a, b, c, \dots)) = \sum_{a,b,c,\dots} p(a, b, c, \dots) f(a, b, c, \dots)$

z.B.  $E(QS + RS + RT - QT) = \sum_{q,r,s,t} p(q,r,s,t) (qs + rs + rt - qt)$   
 $\leq 2$   
 $\leq \sum_{q,r,s,t} p(q,r,s,t) \cdot 2 = 2$  (15)

und  $E(QS + RS + RT - QT) = \sum_{q,r,s,t} p(q,r,s,t) (qs + rs + rt - qt)$   
 $= \sum_{q,r,s,t} p(q,r,s,t) qs + \sum_{q,r,s,t} p(q,r,s,t) rs + \sum_{q,r,s,t} p(q,r,s,t) rt - \sum_{q,r,s,t} p(q,r,s,t) qt$  (16)  
 $= E(QS) + E(RS) + E(RT) - E(QT)$

aus (15) und (16) folgt sofort

$$E(QS) + E(RS) + E(RT) - E(QT) \leq 2$$

„Bell'sche Ungleichung“ (17)

(Variante nach Clauser, Horne, Shimony + Holt, CHSH)

d.h. falls die Welt/dieses Experiment durch eine klassische/lokale/kausale Theorie beschrieben wird, dann gilt (17)

## b) quantenmechanische Analyse

Nun das quantenmechanische Experiment, Quelle:  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|↑↑\rangle - |↓↓\rangle)$  (18)

verschränkte Zustand

wieder je ein Teilchen je Alice, das andere zu Bob, aber unter Bewahrung der Verschränkung (Zst. 18). Wieder gleichzeitige Messung, nun der folgenden Observablen

$$Q = \sigma_{z,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$S = \frac{-\sigma_{z,2} - \sigma_{x,2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$R = \sigma_{x,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T = \frac{\sigma_{z,2} - \sigma_{x,2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

„z, x Basis“

45° rotierte Basis

es ist nun relativ einfach, folgende Erwartungswerte auszurechnen:

$$\langle QS \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \langle RS \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \langle RT \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \langle QT \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (20)$$

(Zeig als Übungsaufgabe)

$$\Rightarrow \langle QS \rangle + \langle RS \rangle + \langle RT \rangle - \langle QT \rangle = 2\sqrt{2} > 2 \quad \nabla \quad (21)$$

d.h. in Quantentheorie ist die Bell'sche Ungleichung verletzt... ?

Was bedeutet das? Wir haben in der Herleitung von (17) irgendwo mindestens einen Fehler gemacht. Was für Annahmen waren in dieser Herleitung?

1) die Messungen  $Q, R, S, T$  haben definierte Werte, die unabhängig von Messungen sind. (auch „Realismus“ genannt) (22)

2) Annahme dass Alices Messung das Messergebnis von Bob (und umg.) nicht beeinflusst („Lokalität“) (23)

1) + 2) „lokaler Realismus“ oder „lokal realistische Theorie“ sind plausibel ... aber Verletzung Bell'scher Ungl. (21) bedeutet, dass entweder (22) oder (23) oder beide Annahmen (22) und (23) falsch sind.

Was besagt die Natur, d.h. Experimente, zur Bellschen Ungleichung?  
 Experimente (mit Photonen) haben die Bellschen Ungleichungen klar,  
zweifelsfrei verletzt!! D.h. die Natur erfüllt die Bellsche Ungleichung (17)  
nicht, ist aber in einwandfreier Übereinstimmung mit den quantenmechanischen  
 Resultaten.

Verschränkte Zustände (18) und ähnliche führen zu vielen Überraschungen  
 in Quantum Computation + Quanteninformation und sind wesentlich  
 für quanten teleportation (werden wir bald besprechen) und auch  
 „superdense coding“ in der Quanteninformationstheorie.

Die quanten-Korrelationen in EPR Experimenten sind stärker als jede Korrelation,  
 die jemals in einer klassischen, (lokal-realistischen) Physik erreicht werden  
 kann und führen dazu, dass die Quantenphysik eine neue, sehr mächtige Art  
 von Informationsverarbeitung (=Rechnungen) ermöglicht, die klassisch  
 unmöglich ist.