

Könnte man nicht direkt Gleichungen für die Erwartungswerte  $\langle \hat{S}_x \rangle$ ,  $\langle \hat{S}_y \rangle$ ,  $\langle \hat{S}_z \rangle$  der Spin-Komponenten herleiten? Ja  $\rightarrow$  Bloch'sche Gleichungen!

aus (14.103) folgt:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{S}_x \rangle = \underbrace{-\frac{\hbar}{2} 2\Omega \cos(2\Omega t) \sin(\omega t)}_{\propto \langle \hat{S}_z \rangle} - \underbrace{\frac{\hbar}{2} \omega_0 \sin(2\Omega t) \cos(\omega t)}_{\propto \langle \hat{S}_y \rangle} \quad (14.112)$$

$$= \frac{2}{\hbar} \mu_B F \sin(\omega t) \langle \hat{S}_z \rangle - \omega_0 \langle \hat{S}_y \rangle \quad (14.113)$$

$\downarrow$   $\downarrow$   
 $= \frac{e\hbar}{2m_e} B_y$   $\propto B_z$  ( $\hbar\omega_0 = 2\mu_B F_z = 2 \frac{e\hbar}{2m_e} B_z$ )

$$= \frac{e}{m_e} B_y \langle \hat{S}_z \rangle - \frac{e}{m_0} B_z \langle \hat{S}_y \rangle \quad (14.114)$$

analog findet man

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{S}_y \rangle = -\frac{e}{m_0} B_x \langle \hat{S}_z \rangle + \frac{e}{m_0} B_z \langle \hat{S}_x \rangle \quad (14.115)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{S}_z \rangle = \frac{\hbar}{2} 2\Omega \sin(2\Omega t) = 1 \quad (14.116)$$

$$= \hbar\Omega \sin(2\Omega t) \left\{ \sin(\omega t) \sin(\omega t) + \cos(\omega t) \cos(\omega t) \right\} = 1 \quad (14.118)$$

$$= -\frac{e}{m} B_y \langle \hat{S}_x \rangle + \frac{e}{m_0} B_x \langle \hat{S}_y \rangle \quad (14.115)$$

Zusammenfassend erhält man:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \langle \hat{\vec{S}} \rangle = \vec{\mu} \wedge \vec{B}}$$

(analog Kreisel mit Drehimpuls  $\vec{s}$  und Drehmoment  $\vec{B}$ ) (14.120)

mit

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{m_0} \langle \hat{\vec{S}} \rangle$$

$$\langle \hat{\vec{S}} \rangle = \begin{pmatrix} \langle \hat{S}_x \rangle \\ \langle \hat{S}_y \rangle \\ \langle \hat{S}_z \rangle \end{pmatrix} \quad (14.121)$$

$$(14.122)$$

für ein abgeschlossenes System genügt (14.120) zur Beschreibung des Spins. Häufig ist aber der Spin an Freiheitsgrade in seiner Umgebung gekoppelt, z.B. Gitterschwingungen etc., so dass die Präzession nicht gleichmäßig erfolgt. Dann genügt (14.120) nicht, sondern man muss Umgebung mit einbeziehen. Umgebung bewirkt zufällig Phasenverschiebungen (Kicks), so dass z.B.  $\langle \hat{S}_x \rangle$  nicht mehr nur ein

Wert ist, sondern eine Verteilung wird, die mit zunehmender Zeit immer breiter wird und im Mittel  $\langle \hat{S}_x \rangle$  nach genügend langer Zeit gegen Null geht.

→ Man führt Zusatzterme in (14.120) ein, die dieses inkohärente Verhalten beschreiben:

$$\hookrightarrow \langle \hat{S}_x \rangle \xrightarrow{\text{Mittel}} 0$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{S}_x \rangle_{\text{inkohärent}} = -\frac{1}{T_2} \langle \hat{S}_x \rangle \quad (14.123)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{S}_y \rangle_{\text{inkohärent}} = -\frac{1}{T_2} \langle \hat{S}_y \rangle \quad (14.124)$$

da  $x$  und  $y$  eine gleichwertige Rolle spielen, nicht aber  $z$ : diese Richtung ist speziell, da sie entlang dem externen Feld ist.

$T_2$ : Transversale Relaxationszeit (Abklingzeit oder Kohärenzzeit)

(weil spins um  $z$ -Achse präzessionieren geben (123, 124) an, wie schnell die zu  $z$  orthogonalen (= transversalen) Komponenten abklingen / dekohärieren)

$T_2$  ist Maß dafür, wie schnell Spins außer Phase geraten

(entweder ein Ensemble von Spins oder ein einziger Spin der viele Male gemessen und die Messung gemittelt wird)

$z$ -Richtung speziell: kostet Energie: durch Relaxation (Übergang  $|\uparrow\rangle \rightarrow |\downarrow\rangle$ ) kann Spin Energie abgeben und vermehren ein thermodynamisches GGW herzustellen.

( $\#|\uparrow\rangle = e^{-\epsilon_{\uparrow\downarrow}/kT} \#|\downarrow\rangle$ ) → longitudinale Relaxation  $T_1$  (Relaxationszeit)

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{S}_z \rangle_{\text{inkohärent}} = \frac{S_0 - \langle \hat{S}_z \rangle}{T_1} \quad S_0: \text{Wert von } \langle \hat{S}_z \rangle \text{ im td. GGW} \quad (14.125)$$

→ Bloch'sche Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\vec{S}} \rangle = -\frac{e}{m_0} \langle \hat{\vec{S}} \rangle \wedge \vec{B} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_2} \langle \hat{S}_x \rangle \\ -\frac{1}{T_2} \langle \hat{S}_y \rangle \\ \frac{S_0 - \langle \hat{S}_z \rangle}{T_1} \end{pmatrix} \quad (14.126)$$

$T_1, T_2$ : Maß für Stärke der Ankopplung der Spins an Umgebung

→ Messung  $T_1, T_2$  → Rückschlüsse auf Vorgänge in Umgebung...

Bemerkung

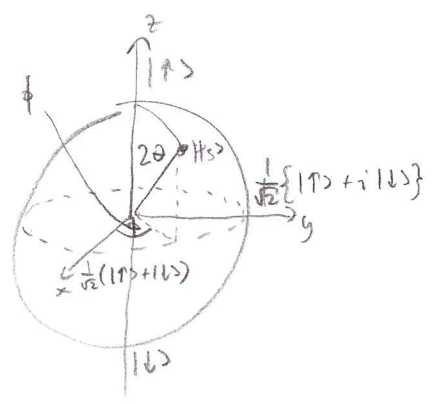
Eigenzustände von  $\hat{S}_x$ :  $\sigma_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$|\psi_{S_x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle \} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \sigma_x |\psi_{S_x}\rangle = |\psi_{S_x}\rangle$

d.h.  $|\psi_{S_x}\rangle$  hat Spin in x-Richtung

analog  $\sigma_y$ :  $|\psi_{S_y}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \sigma_y |\psi_{S_y}\rangle = |\psi_{S_y}\rangle$



$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$   
 $0 \leq \phi < 2\pi$

"Bloch Sphäre": eindeutige Abbildung aller möglichen Spin-Zustände  $|\psi\rangle = e^{i\alpha} \{ \cos\theta |\uparrow\rangle + e^{i\phi} \sin\theta |\downarrow\rangle \}$  auf die Einheitskugel (isomorphismus, 1:1 mapping)

(allg. Zustand  $|\psi\rangle = (a + ib)|\uparrow\rangle + (c + id)|\downarrow\rangle$  4 reelle Freiheitsgrade

Normierung  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$  - 1 Freiheitsgrad

"overall phase"  $\rightarrow$  nicht wichtig - 1 Freiheitsgrad

bleiben übrig: zwei Winkel  $\theta, \phi$ )

$\theta$ : Longitudinaler Freiheitsgrad ( $\|\vec{B}\|(\tau) \rightarrow T_1$ )

$\phi$  ind. phase zwischen  $|\uparrow\rangle$  und  $|\downarrow\rangle$ , wichtig für Interferenz

transversaler Freiheitsgrad  $\rightarrow T_2$  Dekohärenz (Verlust Interferenz)

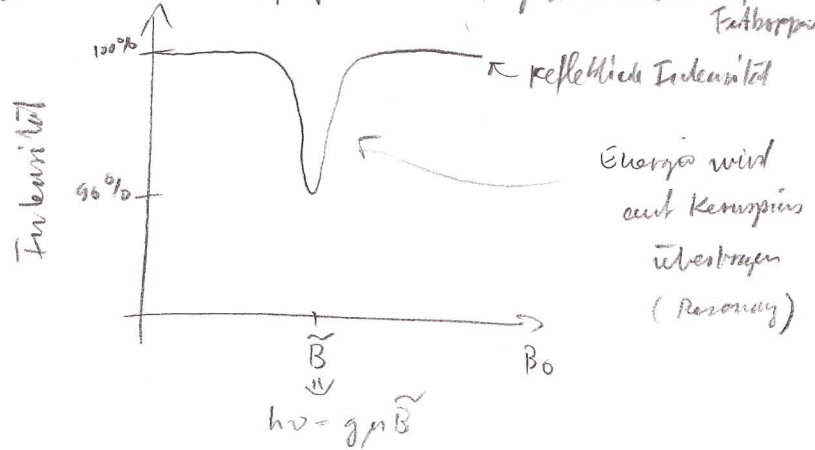
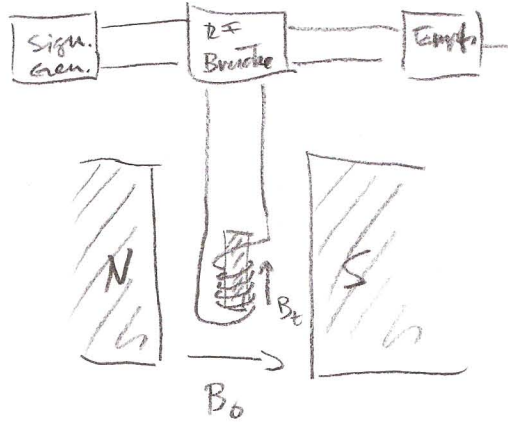
für alle Relaxations Prozesse ( $|\uparrow\rangle \leftrightarrow |\downarrow\rangle$ ) gilt: <sup>zwei</sup> <sup>invar. F.</sup>  $\phi$  zwischen  $|\uparrow\rangle$  und  $|\downarrow\rangle$

$\rightarrow T_1$  obere Schranke für  $T_2$  ( $T_2 \leq 2T_1$ ) oft:  $T_2 \ll T_1$

z.B.  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$   $\xrightarrow[\text{Relaxation}]{|\downarrow\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle}$   $|\psi\rangle = |\uparrow\rangle$  wenn  $\phi$  nicht def.  $\rightarrow$  verloren  
↑ phase  $\phi = 0$  (ohne Beweis) kann beliebige Werte annehmen

Spin 1/2: Rotation um  $360^\circ \rightarrow |\psi\rangle \rightarrow -|\psi\rangle$   
 Rot. um  $720^\circ \rightarrow |\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle$  FERMION!

Praxis Kernspin: unabhängig wandelbares + veränderliche Bewegung Kern  $\rightarrow$  Resonanz anwendbar auf Flüssig  
 Festkörper



Kernspin: magnetisches Moment  $\mu_I = g_I \mu_K I$

$\vec{I}$ : Drehimpuls / Spin Kern

$g_I$ : g-Faktor

$$\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p}$$

$$\frac{\mu_B}{\mu_K} \approx 1836 \approx \frac{m_p}{m_e} \left( \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \right)$$

$$|\vec{I}| = \sqrt{I(I+1)} \hbar$$

$$m_I = I, I-1, \dots, -I$$

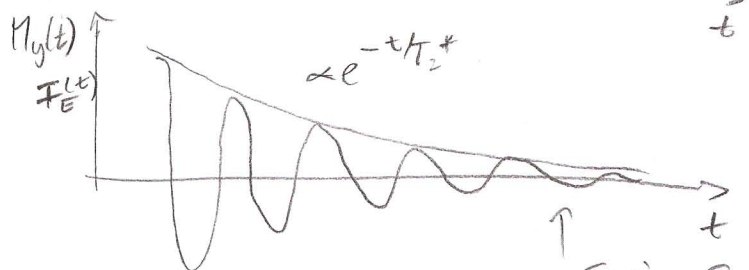
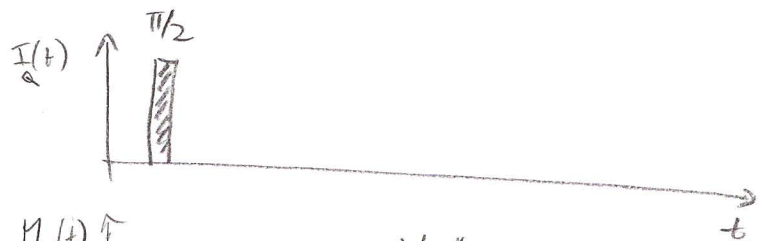
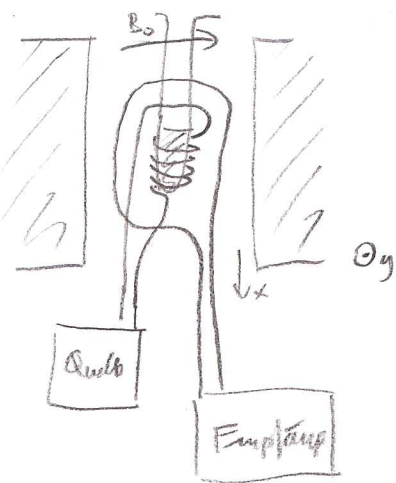
Energie im Feld  $V = -\mu_I B_0 = -g_I \mu_K m_I B_0$

( $g_I = 5.6$  proton  
 $g_I = -3.8$  neutron)

(alles analog Elektron, aber  $\mu_B \rightarrow \mu_K$ )

Resonanz:  $h\nu = g_I \mu_K B_0 \rightarrow \nu \sim 42.5 \text{ MHz}$  für Proton,  $B=1\text{T}$   
 ( $\hbar = 7m, \Delta E \sim 2 \cdot 10^{-7} \text{ eV}$ )

Induktions Messungen



Freier Induktions  
 Zerfall



# 15.4 Spin Echo

